Tema 1

1	2	3	4	Calificación
B	~~B~~ B	B	B	10 (diez)

APELLIDO Y NOMBRE:
Nº DE LIBRETA: HOJAS:

Lógica y Computabilidad – Segundo Parcial

1er Cuatrimestre de 2018 – 6/7/2018

Empezar cada ejercicio en hoja nueva. Numerar y poner nombre a todas las hojas. Se pueden utilizar todas las macros y los resultados sobre funciones computables y recursivas primitivas vistos en clase. Justificar todas las respuestas.

1. Consideremos $H : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ una función polinomio estrictamente creciente con la siguiente propiedad: para cada valor de $m \in \mathbb{N}_0$, $H(m) \geq m$. Tomemos además $f, g \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ que satisfacen:
$$g(n) = H(f(n))$$
para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

   Probar que si g es recursiva primitiva, entonces f es recursiva primitiva.

---

2. Probar que las siguientes funciones son computables:

   a) Las funciones f_p, definidas para cada número primo $p \in \mathbb{N}_0$ como $f_p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$,
$$f_p(x) = \alpha, \text{si } p^\alpha | x \text{ y } p^{\alpha+1} \nmid x.$$

   b) $L : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$,
$$L(x) = \text{cantidad de cifras del desarrollo en base diez del número } x.$$

---

3. Sea $P(x)$ un predicado recursivo primitivo y h una función. Se define la función
$$f(x) = \Phi\big(h(x), 2 + P(x)\big).$$

   a) Probar que si h es total y es computable, entonces f es computable.

   b) Si $B = \{x \in \mathbb{N}_0 \colon h(x)\downarrow\}$ es recursivamente enumerable, probar que
$$g(x) = \begin{cases} x! & \text{si } f(x)\downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   es parcialmente computable.

---

4. Sea $n = 2^{93} \cdot 5^{11} \cdot 7^{54} \cdot 11^2 \cdot 13^{222} - 1$.

   a) Si $\mathcal{P}$ es un programa tal que $\#\mathcal{P} = n$, escribir el código de $\mathcal{P}$ y describir la función que computa.

   b) Probar que existe un programa que computa la misma función pero cuyo código es un número par.

   c) ¿Es $B = \{(x, y) \in \mathbb{N}_0^2 \colon x = 0\}$ un conjunto recursivamente enumerable?

① $H: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ estrictamente creciente /
$\forall m \in \mathbb{N}_0, H(m) \geq m$.
$f, g\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \ /\ g(n) = H(f(n))$

Probar si g rp $\Rightarrow f$ rp

Como $g(n) = H(f(n))$ y H es un polinomio

$g(n) = a_m f(n)^m + \dots + a_0$, con $H(x) = a_m x^m + \dots + a_0$

Además por la propiedad de H

$g(n) = a_m f(n)^m + \dots + a_0 \geq f(n)$

Por lo tanto no que $f(n)$ debe estar entre 0 y $g(n)$

es decir, $0 \leq f(n) \leq g(n)$

Además como H es estrictamente creciente:

$H(0) < H(1) < H(2) < H(3) \leq \dots < H(g(n))$

y por lo tanto H es inyectiva

Sabemos que $0 \leq f(n) \leq g(n)$ y que $g(n) = H(f(n))$

Basta buscar el valor t entre 0 y $g(n)$

que haga valer $g(n) = H(t)$

Defino

$$f(n) = \min_{0 \leq t \leq g(n)} \{ H(t) = g(n) \}$$

Si g es PR, como la minimización acotada, H (un polinomio) y "=" son PR (visto en las clases prácticas y teórica) entonces f es PR pues es composición de PR

(2) a) f_p definida para cada primo $p \in \mathbb{N}_0$

$f_p: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ /

$f_p(x) = \alpha \quad , p^\alpha \mid x$ y $p^{\alpha+1} \nmid x$

Es decir, estamos buscando el exponente de p en la factorización en números primos de x (que es única)

Basta hacer un programa que pregunte si p divide a x, en ese caso, aumentar en 1 un contador y seguir preguntando si lo divide p^{contador} hasta que no.

Si p no divide a x, devuelvo 0.

Veamos el programa (uno) que la computa

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{IF } X_1 = 0 \text{ GOTO } E \longrightarrow \text{pues } f_p(0) = 0 \text{ según definimos} \\
 & Z_2 \leftarrow p \\
 & Z_1 \leftarrow \mathrm{Div}(Z_2, X_1) \\
 & \text{IF } Z_1 = 0 \text{ GoTo } E \\
[A] & Y \leftarrow Y + 1 \\
 & Z_1 \leftarrow \mathrm{Div}(Z_2^Y, X_1) \\
 & \text{IF } Z_1 = 1 \text{ GoTo } A \\
 & Y \leftarrow Y - 1
\end{array}
$$

donde $\mathrm{Div}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \mid y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} = \underbrace{\max_{t \le x}\{ty \le x\} \cdot y = x}_{\text{comp de PR}}$

y x^y es la potencia. Como vimos en la materia estos son PR y $\therefore$ computables

d) $L: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

$L(x)$ = cant de cifras en el desarrollo decimal de x

Sea $\lfloor \log_{10}(x) \rfloor = \max\limits_{0 \leq a \leq x} 10^a \leq x$

Como máx acotado, Pot y ≤ son P.R, $\lfloor \log_{10}(x) \rfloor$ es PR por comp. Como es PR, es computable

Luego $L(x) = \lfloor \log_{10}(x) \rfloor + 1$

y una vez más la suma es PR,

por lo tanto por comp $L(x)$ es PR y en particular computable

③ $P(x)$ RP y h función. Sea f /

$$f(x) = \Phi(h(x), 2 + P(x))$$

a) Probar:

si h es total y computable, entonces f computable

Como P es un predicado puede valer 1 ó 0

por lo tanto,

$$f(x) = \begin{cases} \Phi(h(x), 3) & \text{si } P(x) \\ \Phi(h(x), 2) & \text{si } \neg P(x) \end{cases}$$

Sea $P / \#P = 3 = [p_1^{\#I_1} \dots p_k^{\#I_k}] - 1$

~~con I_k último instrucc de P~~

$4 = 2^2$, luego P consta de una instrucción

con código 2

$$l(2) = \max_{t \leq 3} \{ 2^t \mid 3 \} = 0$$

$$r(2) = \frac{\frac{3}{2^0} - 1}{2} = 1$$

$$l(1) = \max_{t \leq 2} \{ 2^t \mid 2 \} = 1$$

$$r(1) = \frac{\frac{2}{2^1} - 1}{2} = 0$$

$2 = \langle 0, \langle 1, 0 \rangle \rangle$

luego I_1 es $Y \leftarrow Y + 1$

Sea $Q / \#Q = 2 \Rightarrow \#Q + 1 = 3 = 2^0 3^1$

luego $\#I_1 = 0$ y $\#I_2 = 1$

$0 = \langle 0, \langle 0, 0 \rangle \rangle \Rightarrow I_1 : Y \leftarrow Y$

$1 = \langle 1, \langle 0, 0 \rangle \rangle \Rightarrow I_2 : [A_1] \; Y \leftarrow Y$

Luego P y Q son programas que siempre terminan

P: $Y \leftarrow Y+1$ Q: $Y \leftarrow Y$

$[A_1]\ Y \leftarrow Y$

Si h es total y computable, f va a ser el resultado de ejecutar P si vale el predicado o Q en caso contrario con entrada h(x)

(Además el predicado es PR ∴ computable)

Veamos un programa que computa a f:

$Z_1 \leftarrow P(X_1)$
$Z_2 \leftarrow h(X_1)$
IF $Z_1 = 0$ GO TO A_1
$Y \leftarrow \Psi_P(Z_2)$
GO TO E

$[A_1]\ Y \leftarrow \Psi_Q(Z_2)$

b) Si $B = \{x \in \mathbb{N} : h(x)\downarrow\}$ es r.e, probar que

$$g(x) = \begin{cases} x! & \text{si } f(x)\downarrow \\ \uparrow & \text{c.c} \end{cases}$$

es parcialmente computable

$$C_B = \begin{cases} 1 & \text{si } h(x)\downarrow \\ 0 & \text{si } h(x)\uparrow \end{cases}$$

Como B es r.e existe F parcialmente computable /

$$B = \{x \in \mathbb{N} : F(x)\downarrow\}$$

Luego $C_B = \begin{cases} 1 & \text{si } F(x)\downarrow \\ 0 & \text{si } F(x)\uparrow \end{cases}$

~~Luego $h(x)\downarrow \iff F(x)\downarrow$~~

Pero como vimos en (a) si $h(x)\downarrow$ luego $f(x)\downarrow$ pues los programas P y Q no se colgarán y si $h(x)\uparrow$ lo mismo pasa con $f(x)$

Luego $h(x)\downarrow \iff F(x)\downarrow \iff f(x)\downarrow$

Por lo tanto f es parcialmente computable pues F era parc. computable

Luego g es parcialmente computable ya que x! es computable y f también

Un programa que la computa es:

```
Z1 <- f(X1)
Y <- Y + 1
IF X1 = 0 GOTO E
Y <- X1!  <- (trivial)
```

Asamblea

Scanned by CamScanner

(4) $n = 2^{93} \cdot 3^{0} \cdot 5^{11} \cdot 7^{54} \cdot 11^{2} \cdot 13^{222} - 1$

a) $P / \#P = n$

P entonces es $P = \{I_1\ I_2\ I_3\ I_4\ I_5\ I_6\}$

$\#I_1 = 93 \quad \#I_2 = 0 \quad \#I_3 = 11$

$\#I_4 = 54 \quad \#I_5 = 2 \quad \#I_6 = 222$

$I_1)$ $\ell(93) = \max\limits_{t \leq 94} \{2^t \mid 94\} = 1$

$r(93) = \dfrac{\frac{94}{2} - 1}{2} = 23$

$\ell(23) = 3$

$r(23) = \dfrac{\frac{24}{8} - 1}{2} = 1$

$93 = \langle 1, \langle 3, 1 \rangle\rangle \qquad b = 2 + \#M = 2 + 1$

$\#M = 1$

• I_1: $[A_1]$ IF $X_1 \neq 0$ GOTO $[A_1]$ $c = \#V - 1 \Rightarrow \#V = 2$

$\Rightarrow V = X_1$

$I_2)$ $\ell(0) = 0 \quad r(0) = 0$

$0 = \langle 0, \langle 0, 0 \rangle\rangle$

• I_2: $Y \leftarrow Y$

$I_3)$ $\ell(11) = 2 \quad r(11) = \dfrac{\frac{12}{2^2} - 1}{2} = 1$

$\ell(1) = 1 \quad r(1) = 0$

$11 = \langle 2, \langle 1, 0 \rangle\rangle$

• I_3: $[A_2]$ $Y \leftarrow Y + 1$

B_1

$I_4)$ $\# I_4 = 54$

$\ell(54) = \max_{t \leq 55} \{2^t | 55\} = 0$

$r(54) = \frac{55-1}{2} = 27$

$\ell(27) = 2$

$r(27) = \frac{\frac{28}{2^2} - 1}{2} = 3$

$54 = \langle 0, \langle 2, 3 \rangle\rangle$

$\# V = 4$

$V = X_2$

• I_4: $X_2 \leftarrow X_2 - 1$

$I_5)$ $2 = \langle 0, \langle 1, 0 \rangle\rangle$ $\ell(2) = 0$

$r(2) = \frac{3-1}{2} = 1$

I_5: $Y \leftarrow Y + 1$

$I_6)$ $\# I_6 = 222$

$\ell(222) = 0$ $r(222) = \frac{223-1}{2} = 111$

$\ell(111) = 4$ $r(111) = \frac{7-1}{2} = 3$

$222 = \langle 0, \langle 4, 3 \rangle\rangle$

$b = 2 + \# M = 4 \Rightarrow \# M = 2$

I_6: IF $X_2 \neq 0$ GoTo $[A_2]$

$M = A_2$

B_1

$\# V = C + 1 = 4 \Rightarrow V = X_2$

Asamblea

Luego P es:

[A_1] IF $X_1 \neq 0$ GO TO A_1
$Y \leftarrow Y$
[A_2] $Y \leftarrow Y + 1$
$X_2 \leftarrow X_2 - 1$
$Y \leftarrow Y + 1$
IF $X_2 \neq 0$ GO TO [A_2]

Si $X_1 \neq 0$ P se cuelga, sino $Y = 2X_2$ si $X_2 \geq 1$
ó $Y = 2$ si $X_2 = 0$

Luego P computa

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x = 0 \wedge y \geq 1 \\ 2 & \text{si } x = 0 \wedge y = 0 \\ \uparrow & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

b) Basta agregar al comienzo una instrucción que no afecte el programa, pero además que el exponente de 2 sea 0 (en la fact de números primos) de manera que el código sea Par pues el único primo par es 2, y $2^0 = 1$

Luego [$0, a_2, \ldots a_n$] es impar

La instrucción de código 0 es: $Y \leftarrow Y$

Sea $Q / \#Q = 2^0\, 3^{93}\, 5^0\, 7^{11}\, 11^{54}\, 13^2\, 17^{222} - 1$

Luego $\#Q$ es par pues Impar -1 es par

Q es: $\underbrace{Y \leftarrow Y}_{P}$

Q computa entonces la misma función que P

Asamb

Scanned by CamScanner

c) $B = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x = 0\}$

B es r.e si $\exists$ función parcialmente computable / $B = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : f(x,y)\downarrow\}$

La función que vimos en (a) está, llamémosle f_a, definida para $(x,y) \in \mathbb{N}^2 / x \neq 0$, es decir $f_a(x,y)\downarrow \Leftrightarrow x \neq 0$

Luego esta f_a está definida para todo elemento de B y además sabemos que es parcialmente computable

Entonces B es recursivamente enumerable